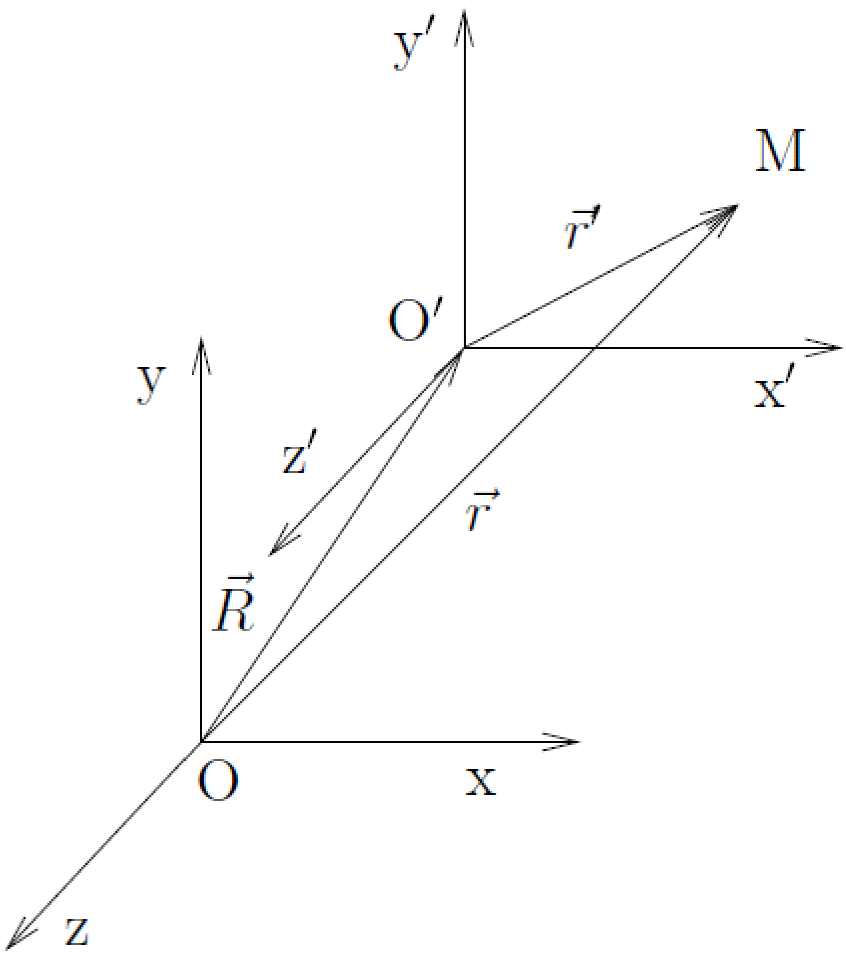
Opakování - Pohyb hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě

- kartézská soustava souřadnic *S*: *x*, *y*, *z*
- pohybující se kartézská soustava *S'*: *x'*, *y'*, *z'*



- pohyb hmotného bodu M v **inerciální soustavě**, **Gallileova transformace**:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t, \quad \vec{u} = konst$$

- rychlost hmotného bodu M:

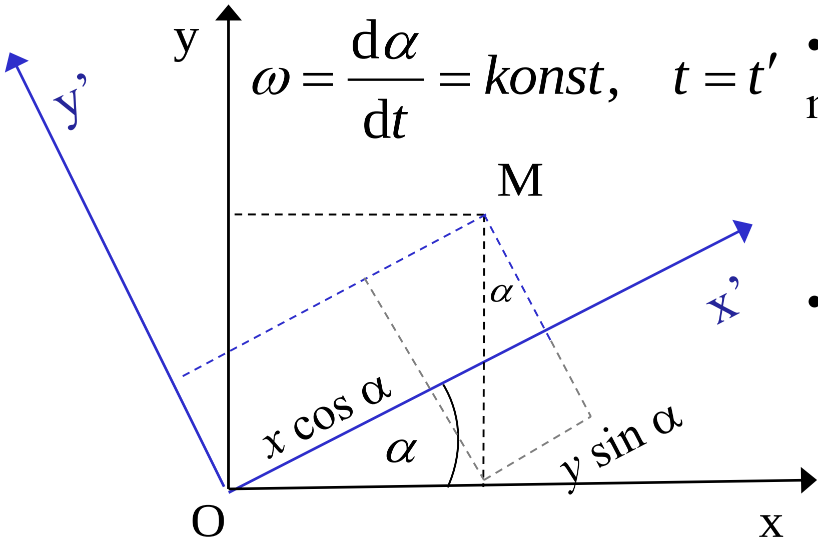
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$$

- Jelikož je vzájemná rychlost soustav konstantní, budou zrychlení v obou soustavách stejná:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}'$$

Opakování - Pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = konst, \quad t = t'$$

• obecnou rotaci kolem libovolně orientované osy můžeme získat složením tří rotací kolem souřadných os.

$$\vec{\omega}' = \left(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z\right)$$

• Coriolisovo zrychlení při rotaci kolem obecné osy:

$$\vec{a}_C = 2\left(\vec{\omega}' \times \vec{v}'\right) = -2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}'\right)$$

• Coriolisovo zrychlení je tedy kolmé jak na vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}'$ (směr rotační osy), tak na rychlost hmotného bodu $\vec{v}'$ v rotující soustavě souřadné.

$$\vec{\omega}' = \left(0{,}0, \omega'_z\right)$$

$$\vec{a}_C = 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega'_x & \omega'_y & \omega'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(\omega'_y v'_z - \omega'_z v'_y,\ \omega'_z v'_x - \omega'_x v'_z,\ \omega'_x v'_y - \omega'_y v'_x\right) = 2 \cdot \left(-\omega'_z v'_y,\ \omega'_z v'_x,\ 0\right)$$

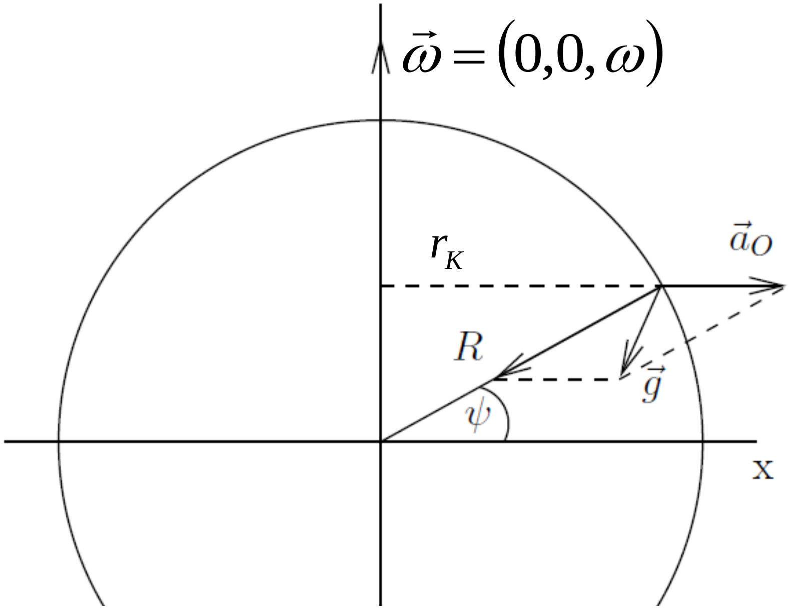
• Odstředivé zrychlení zrychlení při rotaci kolem obecné osy:

$$\vec{a}_O = -\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

• Velikost odstředivého zrychlení:
r_K je vzdálenost bodu od osy rotace

$$a_O = \omega^2 r \sin\beta = \omega^2 r_K$$

Pohyb na zemském povrchu



$$T = 24 \times 60 \times 60 s = 86400 s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400} = 7{,}272 \cdot 10^{-5} \mathrm{s}$$

- Souřadnou soustavu spojenou se Zemí považujeme přibližně za inerciální soustavu.

$$\vec{a}_O = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') \qquad a_O = \omega^2 r_K = \omega^2 R \cos\psi$$

- rotace kolem vlastní osy se stálou úhlovou rychlostí ω=7,272.10^{-5} s^{-1}

$$\text{Země}: R = 6{,}373 \cdot 10^6 \,\mathrm{m}$$

$$\text{Praha}: \psi = 50°05' \Rightarrow \cos\psi = 0.6417$$

$$\Rightarrow a_O = \omega^2 R \cos\psi = 0{,}0216 \,\mathrm{ms}^{-2} = 0{,}0022\, g$$

- Normální tíhové zrychlení:

$$g_n = 9{,}80665 \,\mathrm{ms}^{-2}$$

- Odstředivéhé zrychlení se skládá s gravitačním zrychlením ve výsledné tíhové zrychlení, které nemíří do středu Země.
- Země, když byla v plastickém stavu nabyla tvaru elipsoidu zploštělého na pólech, takže tíhové zrychlení je všude kolmé k povrchu Země.

Opakování - Newtonovy zákony

1. Zákon setrvačnosti: Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu pokud není nuceno vnějšími silami tento svůj stav změnit.

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 0$$

2. Zákon síly: Časová změna hybnosti tělesa je úměrná působící síle a má s ní stejný směr.

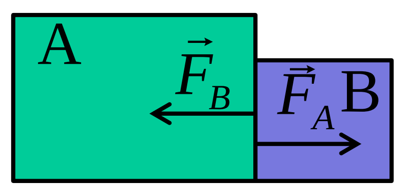
$$\vec{F} = k\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{v}\right)$$

Kde k je konstanta v soustavě jednotek SI je k =1.
Pokud je hmotnost konstantní ,$v << c$ $\Rightarrow$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

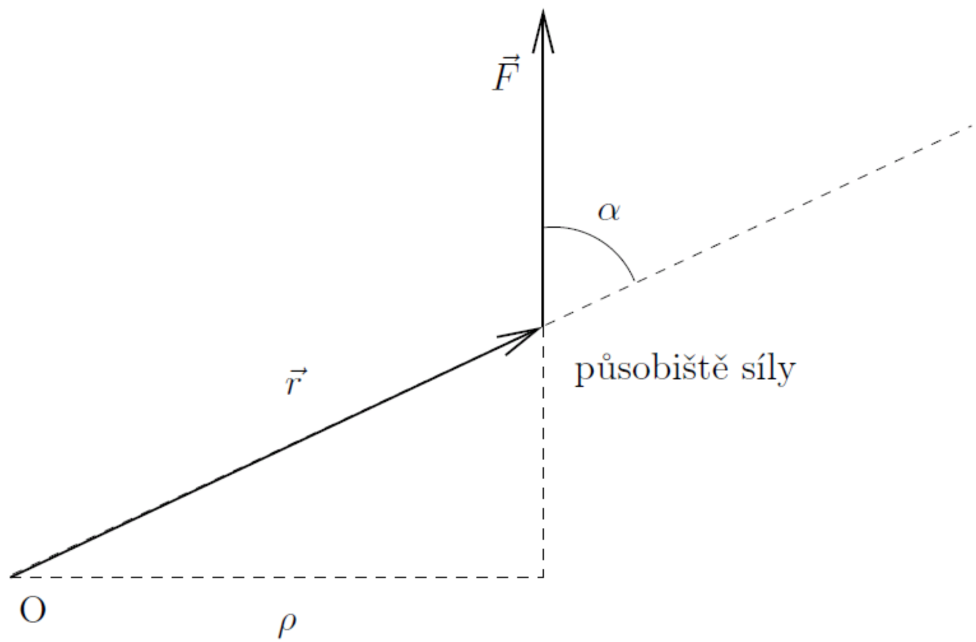
3. Zákon akce a reakce: Každá akce vyvolává reakci opačného směru.Vzájemné síly mezi dvěma tělesy mají vždy stejnou velikost a opačný směr.

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$



Všechny Newtonovy zákony se vztahují na pohyby těles v absolutním čase a prostoru

Opakování - Newtonovy zákony, moment síly, moment hybnosti



Pro studium kruhového pohybu hmotného bodu (hmotného středu tělesa) zavádíme pojem momentu síly a momentu hybnosti vzhledem k bodu O.

Moment síly: $$\vec{M} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

Jeho velikost je rovna: $M = rF \sin\alpha = F\rho$

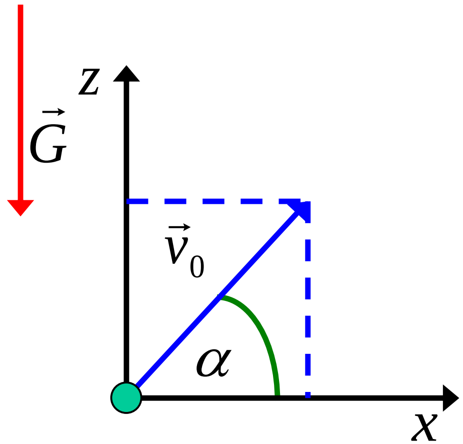
Moment hybnosti: $$\vec{b} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{p}\right]$$

Druhý Newtonův zákon vynásobíme zleva vektorově polohovým vektorem:

$$\left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r} \times \vec{v}\right] = m\left(\left[\vec{v} \times \vec{v}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right]\right) = \left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right]$$

Opakování - Šikmý vrh



Tíha:

$$\vec{G} = m\vec{g}, \quad \vec{g} = (0,0,-g)$$

Pohybové rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g$$

Počáteční podmínky:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (0,0,0)$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (v_{0x}, 0, v_{0z})$$

Řešení:

$$v_x(t) = c_x, \quad v_z(t) = -gt + c_z$$

$$v_x(0) = c_x \Rightarrow c_x = v_{0x}$$

$$v_z(0) = c_z \Rightarrow c_z = v_{0z}$$

Rychlost:

$$v_x = v_{0x}, \quad v_z = -gt + v_{0z}$$

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{0x}, \quad v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -gt + v_{0z}$$

poloha: $x = v_{0x}t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$$z = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t$$

trajektorie:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \quad v_{0z} = v_0 \sin\alpha$$

$$z = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$$

Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh bez odporu vzduchu

pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{z} = -mg$$

počáteční podmínky

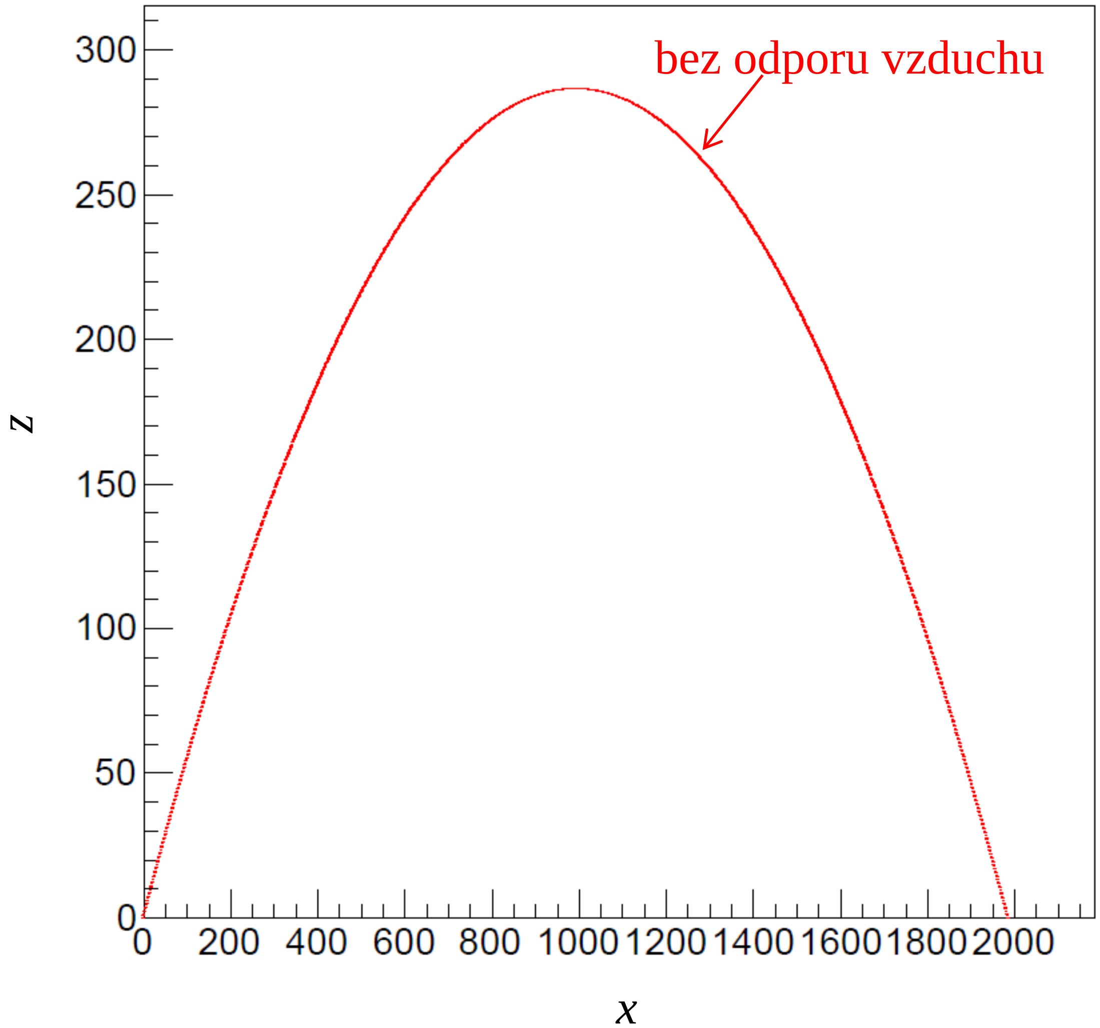
$$x(t=0) = 0$$

$$z(t=0) = 0$$

$$v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_z(t=0) = v_0 \sin\alpha$$

m = 10 g, v_0 = 150 m/s, α = 30°



Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh s odporem vzduchu $\vec{F}_o = -h\vec{v}$ m = 10 g, v_0 = 150 m/s, α = 30°, h = 10^{-4} Ns/m

pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = -h\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = -mg - h\dot{z}$$

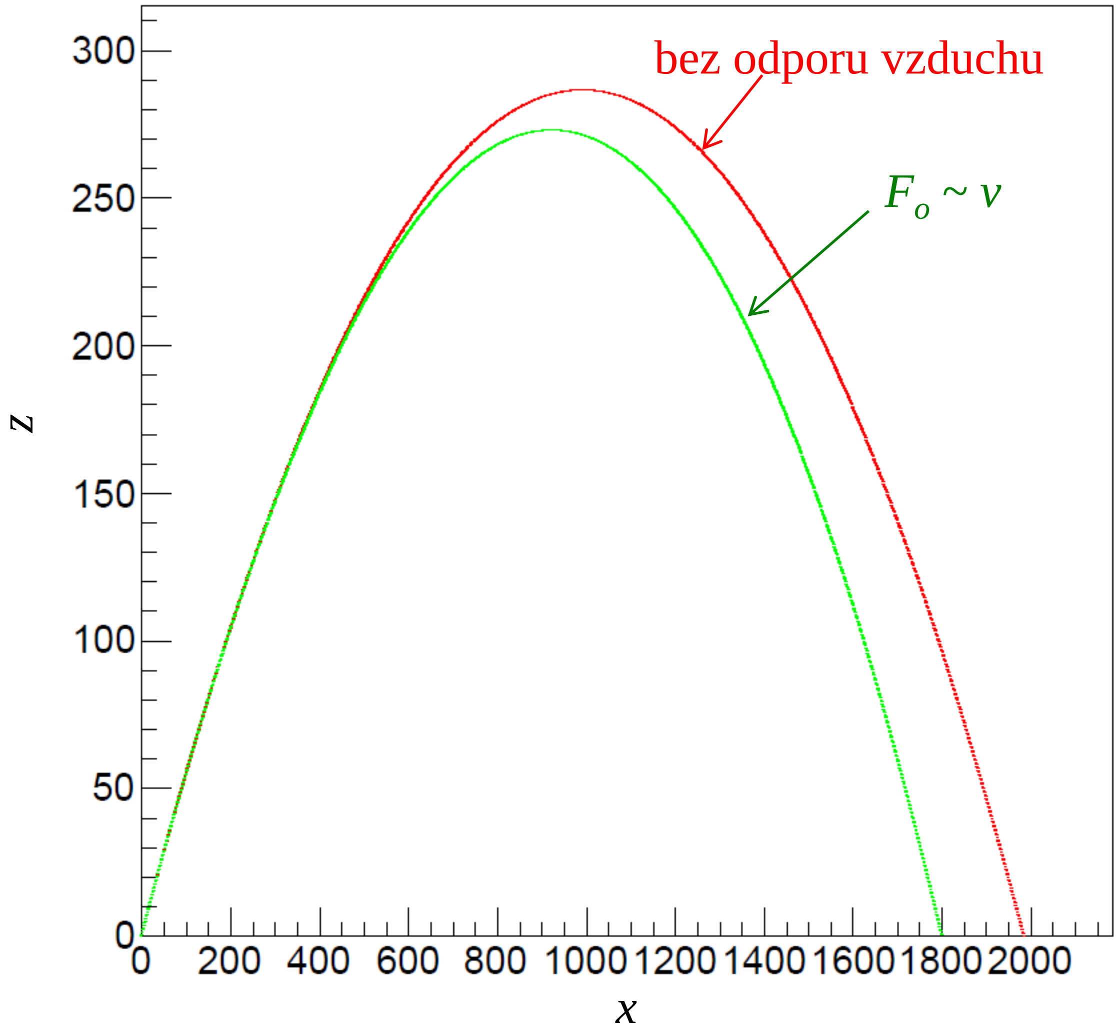
počáteční podmínky

$$x(t=0) = 0$$

$$z(t=0) = 0$$

$$v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_z(t=0) = v_0 \sin\alpha$$



Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh s odporem vzduchu $\vec{F}_o = -hv^2 \dfrac{\vec{v}}{v}$

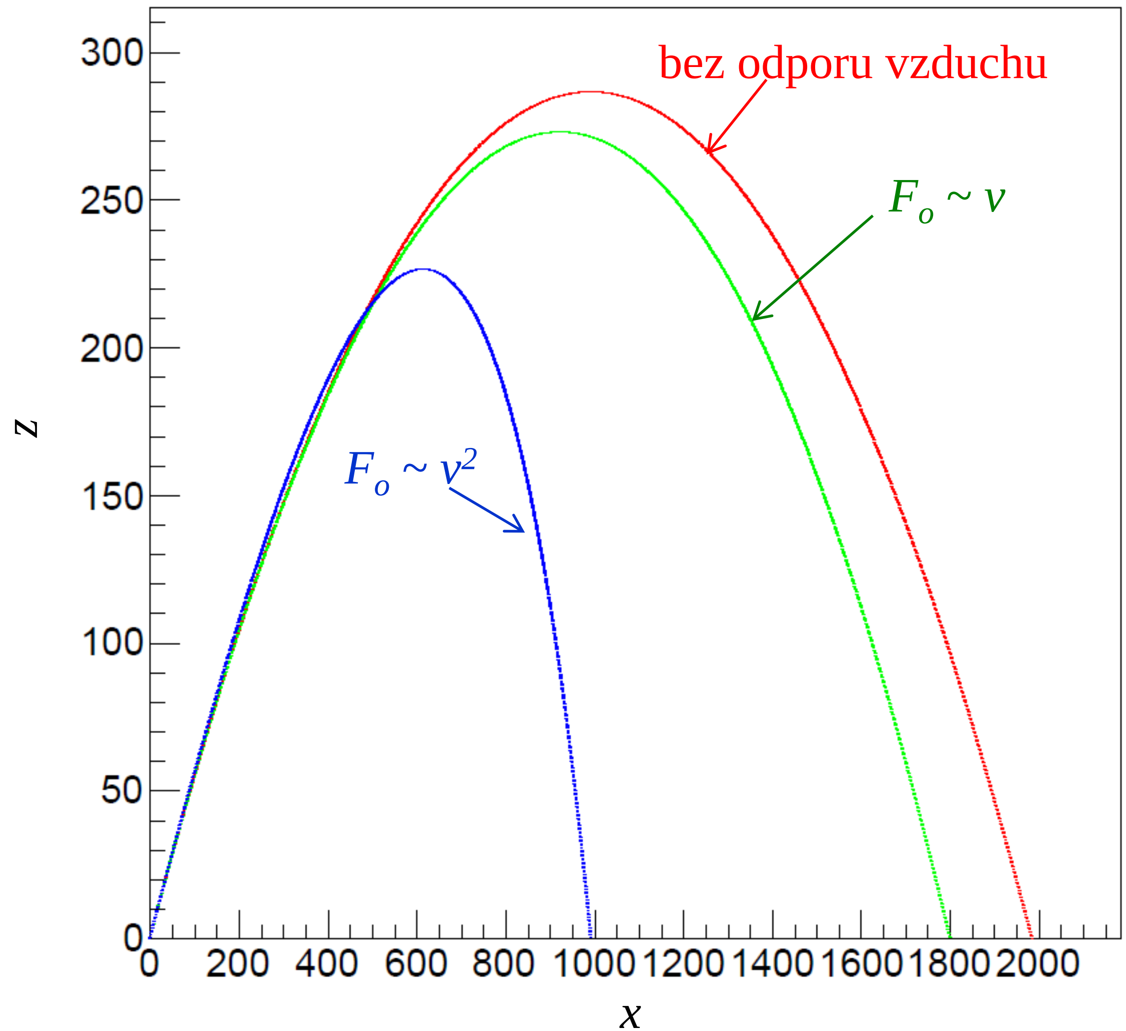
m = 10 g, v_0 = 150 m/s, α = 30°, $h = 10^{-5}$ Ns/m

pohybová rovnice

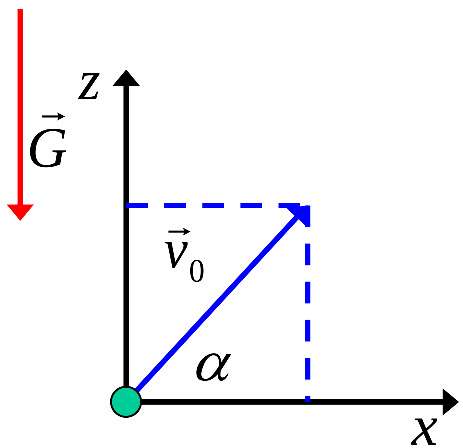
$$m\ddot{x} = -h\dot{x}^2$$
$$m\ddot{z} = -mg - h\dot{z}^2$$

počáteční podmínky

$$x(t=0) = 0$$
$$z(t=0) = 0$$
$$v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$$
$$v_z(t=0) = v_0 \sin\alpha$$



Opakování - Šikmý vrh

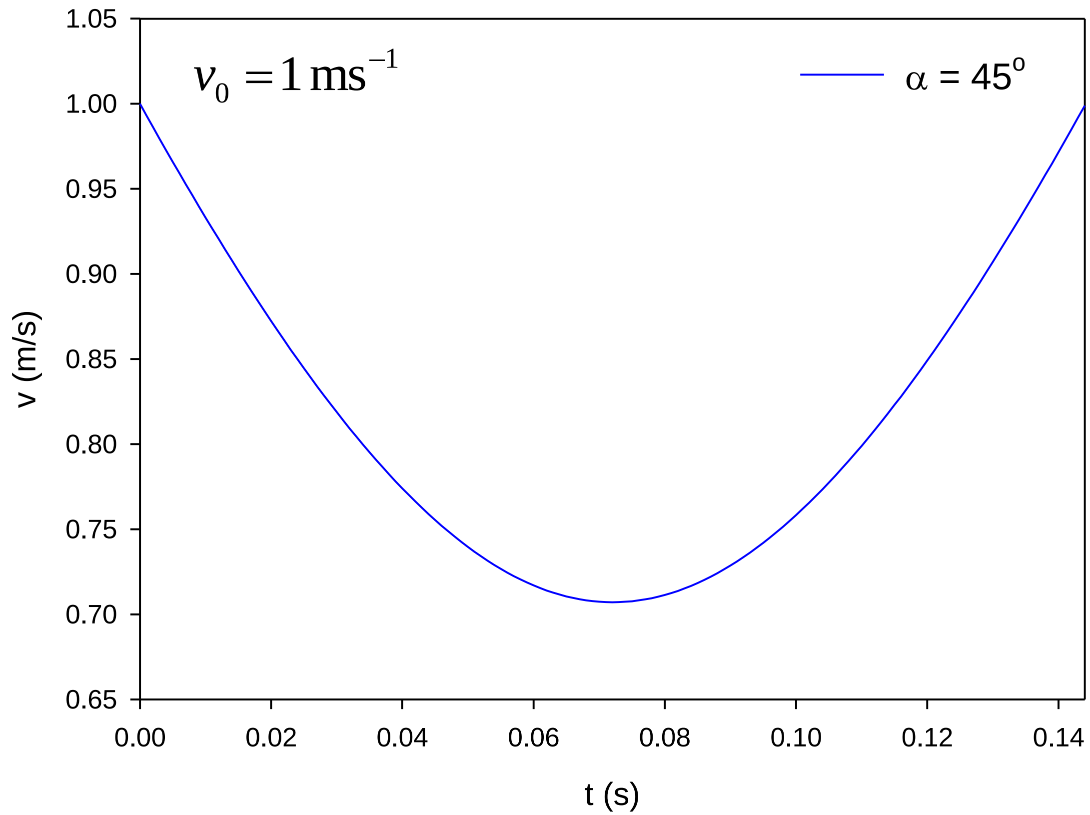


Velikost rychlosti:

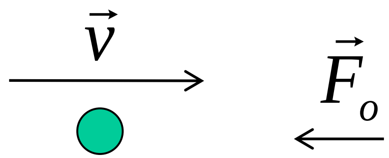
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (-gt + v_0 \sin\alpha)^2} =$$
$$= \sqrt{(v_0)^2 + (gt)^2 - 2gtv_0 \sin\alpha}$$

Rychlost:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_z = -gt + v_0 \sin\alpha$$



Odporová síla vzduchu



• **odporová síla**

průřez tělesa

$$F_o = \frac{1}{2}\rho S C_d v^2$$

• **Reynoldsovo číslo**

$$\mathrm{Re} = \frac{vL\rho}{\mu}$$

v - rychlost

L - charakteristický rozměr tělesa

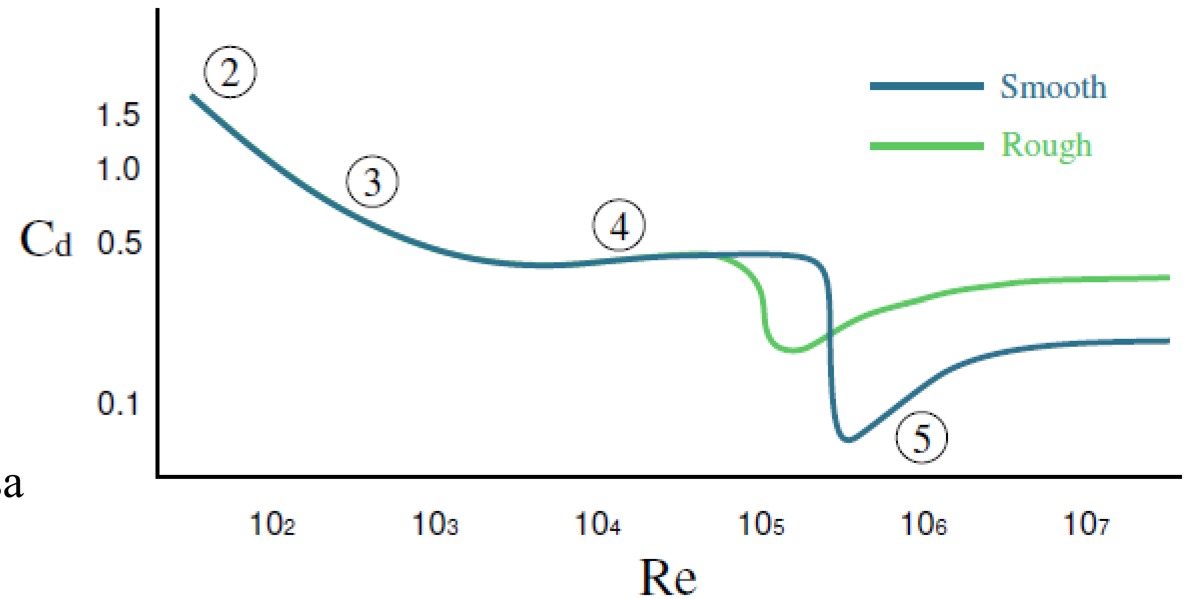
ρ - hustota prostředí

μ - viskozita prostředí (vzduch $\mu = 2\times10^{-5}$ Pa s)

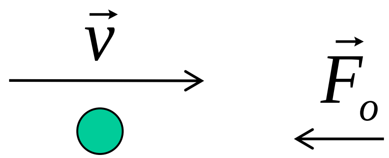
• **součinitel odporu C_d**

• malé Re $< 10^2 \rightarrow C_d \sim 1/v$ $\qquad F_o \sim v$

• $10^2 <$ Re $< 10^5 \rightarrow C_d \sim$ konst. $\qquad F_o \sim v^2$

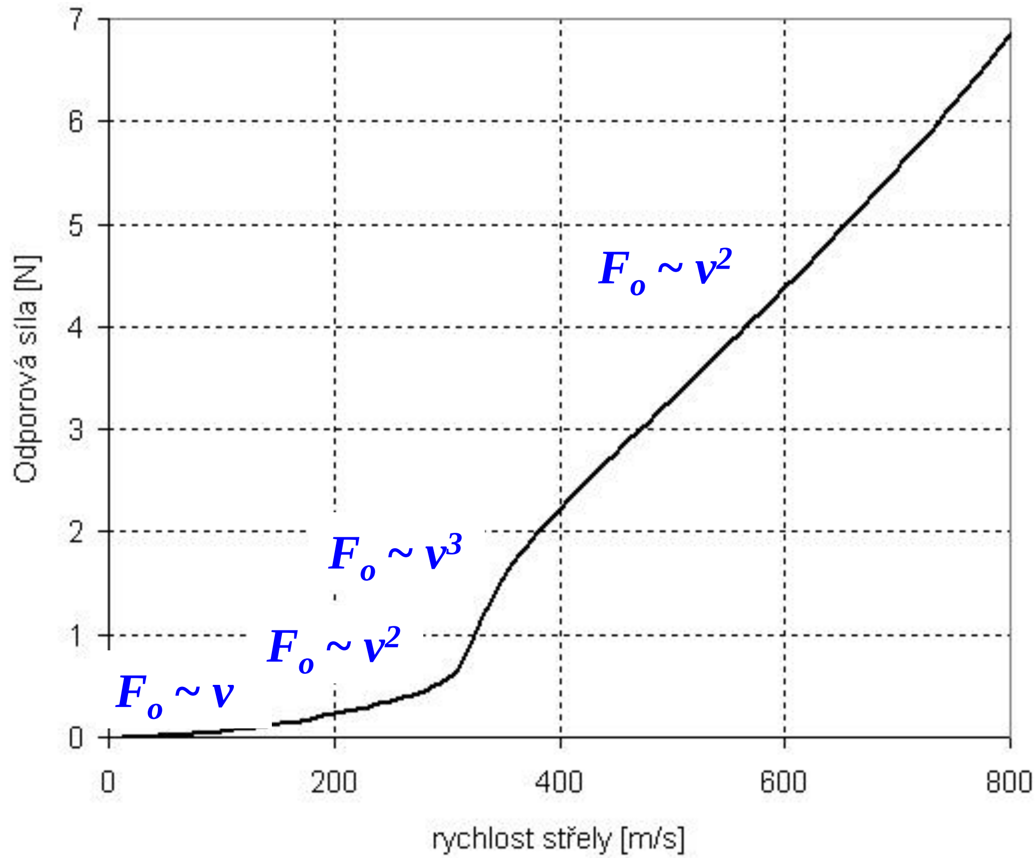


Odporová síla vzduchu

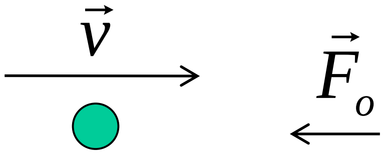


• **odporová síla**

$$F_o = \frac{1}{2}\rho S C_d v^2$$



Odporová síla vzduchu



$$v \le v_c \quad \Rightarrow \quad F_o = hv$$

$$v > v_c \quad \Rightarrow \quad F_o = av^2 + b$$

$v_c \approx 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

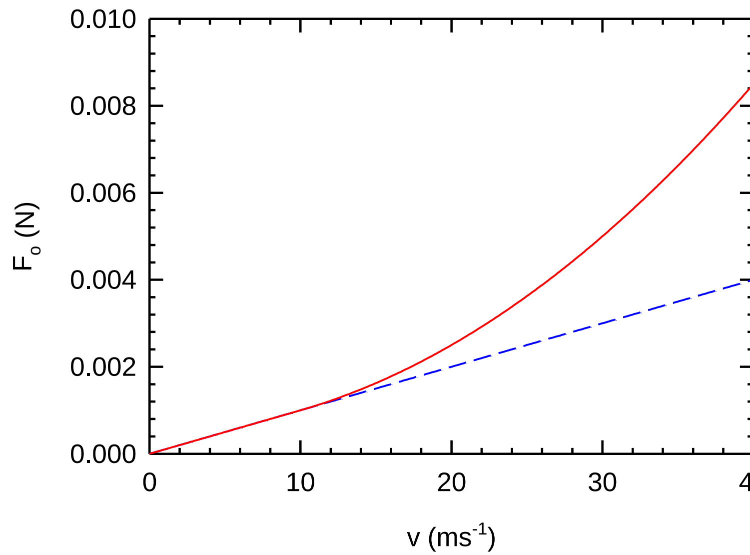
spojitost F_o a její derivace

$$\Downarrow$$

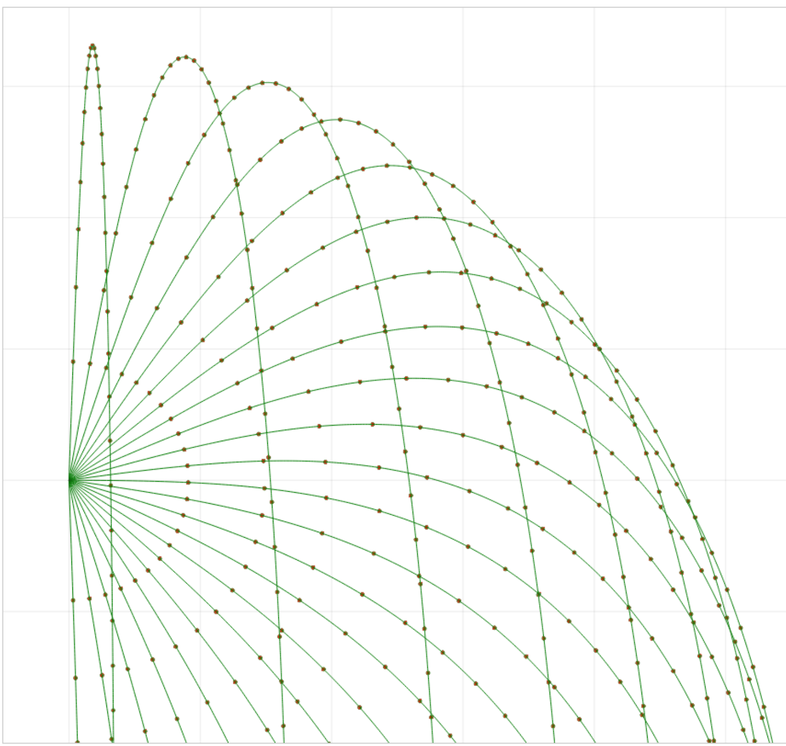
$$a = \frac{h}{2v_c} \qquad b = \frac{hv_c}{2}$$

$h = 10^{-4}$ Ns/m

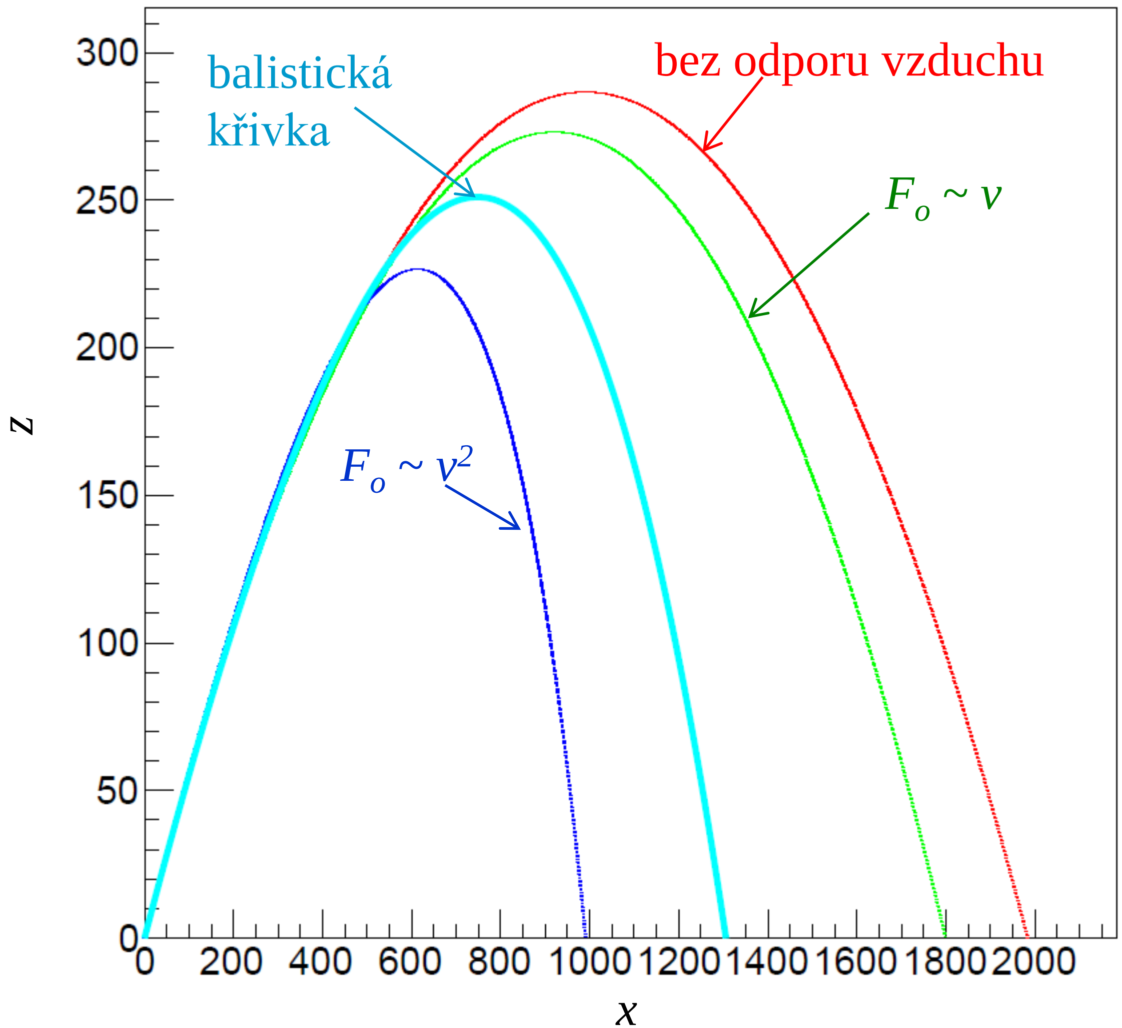
$a = 5\times10^{-6}$ Ns^2/m^2, $b = 5\times10^{-4}$ N



Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

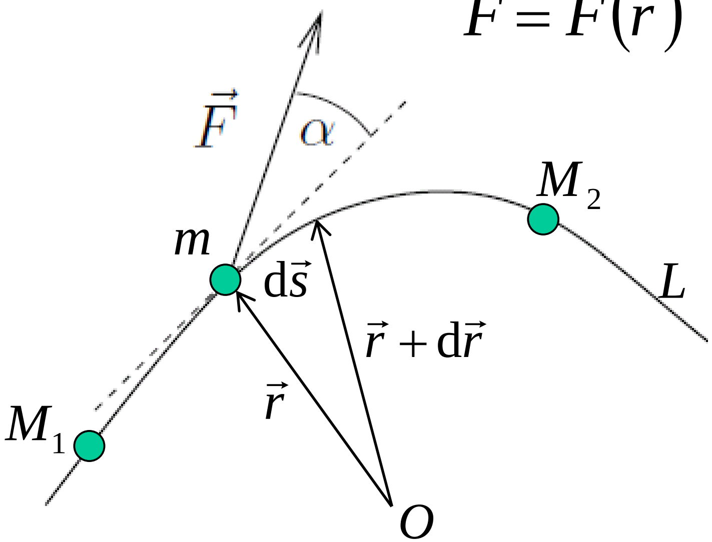


m = 10 g, v_0 = 150 m/s, α = 30^o, h = 10^{-4} Ns/m



Mechanická práce, okamžitý výkon

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$



• **Elementární práci** definujeme:

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = F\,\mathrm{d}s\cos\alpha, \quad [\mathrm{J}]$$

• Výsledná **práce** silového pole po dráze z M_1 do M_2:

$$A_{21} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} \quad [\mathrm{J}]$$

$$A_{12} = \int_{L(M_2)}^{L(M_1)} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = -\int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = -A_{21}$$

• Pokud je rovnice křivky zadaná parametricky:

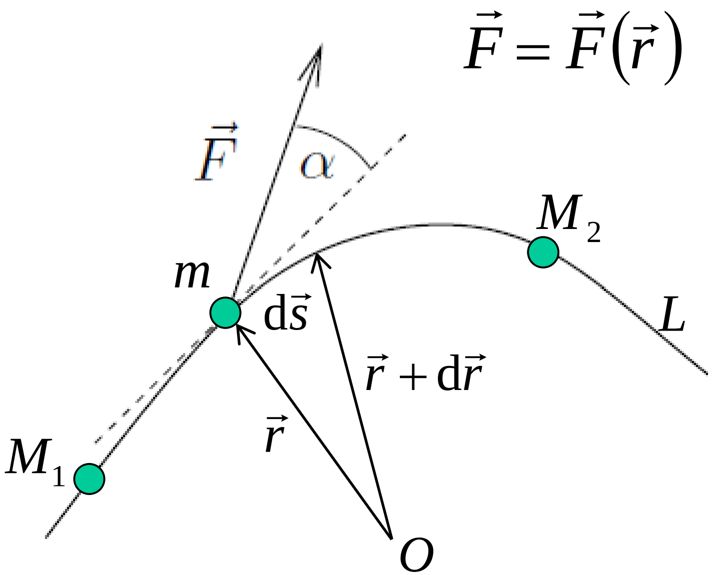
$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F} \cdot \vec{v} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dA}{dt} \right) \mathrm{d}t$$

• **Okamžitý výkon** definujeme:

$$P \equiv \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad [\mathrm{W}]$$

Mechanická práce, kinetická energie



- Vztah pro elementární práci přepíšeme na tvar:

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{s},\quad \mathrm{d}\vec{s}=\vec{v}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}A=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t=m(\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v})=\frac{1}{2}m\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})=$$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\mathrm{d}W_k$$

- **Kinetickou energii** hmotného bodu zavedeme vztahem:

$$W_k\equiv E_k\equiv\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{m}\quad[\mathrm{J}]$$

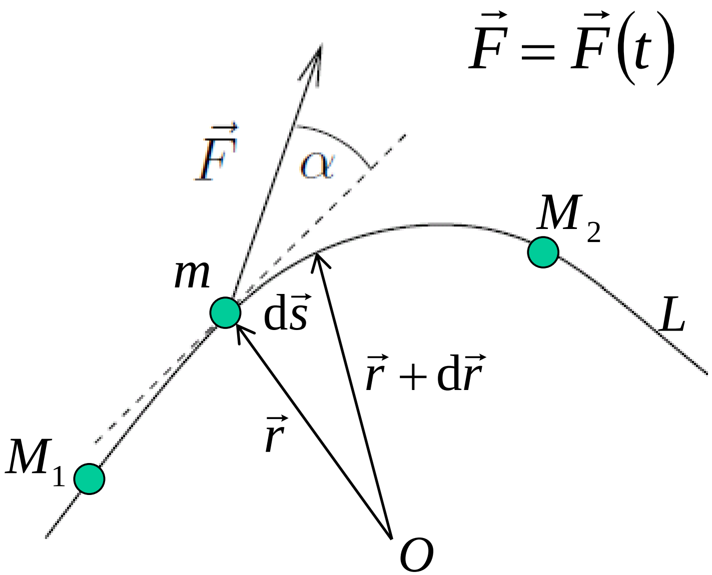
- Výsledná **práce** silového pole po dráze z M_1 do M_2:

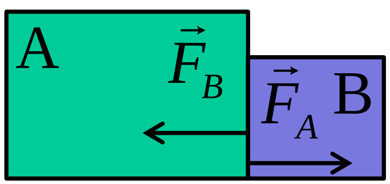
$$\int_{L(M_1)}^{L(M_2)}\mathrm{d}W_\mathrm{k}=[W_\mathrm{k}]_{M_1}^{M_2}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\Delta W_k=A_{21}$$

- **Konzervativní** (potenciálová) silová pole:

$$A_{11}=\oint_L\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=0$$

Časový účinek síly, impuls síly, zákon zachování hybnosti





- Změna hybnosti těles je dána působením sil v časovém intervalu <t_1, t_2>:

$$\Delta\vec{p}_A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A \mathrm{d}t \quad \Delta\vec{p}_B = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B \mathrm{d}t$$

- Podle druhého Newtonova zákona se projeví působení síly během elementárního časového intervalu dt elementární změnou hybnosti:

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}t, \quad \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

- Integrál na pravé straně nazýváme **Impuls síly**:

$$\vec{J} \equiv \vec{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{J}$$

- **Zákon zachování hybnosti** plyne ze 3 New. zák.:

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B \Rightarrow \Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = 0$$

$$\vec{p}_A(t_1) + \vec{p}_B(t_1) = \vec{p}_A(t_2) + \vec{p}_B(t_2) = konst.$$